

**MAESTRÍA EN CIENCIA DE DATOS**

**MÉTODOS NUMÉRICOS Y OPTIMIZACIÓN**

**PROFESOR: ERICK PALACIOS MORENO**

**Enero - Mayo 2019**

**EQUIPO 6**

**Mario Alberto Cruz**

**Miguel Angel Avila**

**Víctor Manuel Guardado**

**Trabajo Final**

**Objetivo del trabajo:**

Aplicando la teoría de moderna de optimización de portafolios, en específico al modelo de Markowitz en conjunto con el Capital Asset Pricing Model (CAPM), es posible obtener portafolios de inversión eficientes.

El presente trabajo tiene como objetivo encontrar la cartera óptima de inversión de una serie de activos financieros minimizando la varianza sujeta a un rendimiento previamente definido y maximizando la pendiente de la recta Capital Market Line (CML) para el caso donde se permiten las posiciones cortas y se posee un activo libre de riesgo.

**Introducción**

El uso formal de los modelos matemáticos y optimización en finanzas se volvió una práctica común entre las décadas de 1980 y 1990. En cuanto a la optimización financiera se les considera los padres de este campo a los Profesores George Dantzig y Harry Markowitz, de este último es de quién se desarrollará el modelo.

En la década de 1970 se dio una gran transformación en el mundo financiero. Se llevó a cabo los tratados de Bretton Woods, estos estipulaban la liberalización de los mercados financieros, además en esa época se vivió una gran inflación derivada de la crisis del petróleo, todo esto en conjunto provocó una gran volatilidad en las tasas de interés.

Lo anterior causó un ambiente de alta fluctuación en los mercados accionarios al igual que en el de bonos y demás instrumentos financieros de la época. Esto creo un mercado dinámico el cual necesitaba dar respuestas a problemas complejos que podían resultar beneficiosos para quien los lograra resolver. Como resultado, se incrementó el uso de técnicas avanzadas de análisis para optimización de modelos en diferentes aspectos de la operación financiera.

**Optimización de Portafolios**

Se busca encontrar la cartera óptima para un inversor en términos de la rentabilidad y el riesgo.

Rentabilidad esperada de un portafolio P:

Donde es la ponderación dada a cada acción y es el valor esperado del rendimiento del activo .

Varianza del portafolio P:

Donde es la covarianza entre los rendimientos de los activos y .

**Capital Asset Pricing Model (CAPM)**

Basado en el modelo de Markowitz, que es un modelo teórico soportado en equilibrio de mercado. Tal que:

Donde

* : es la tasa rentabilidad esperada del activo .
* : es la rentabilidad del activo libre de riesgo.
* : es la sensibilidad del activo con respecto al mercado.

**Forma cuadrática**

Un problema de optimización con una función objetivo cuadrática y una restricción lineal es llamado programación cuadrática. Este tipo de problemas son de suma importancia por sí mismos, y a su vez de aquí se desprenden subproblemas y métodos para la optimización restringida en general tales como la programación cuadrática secuencial (sequential quadratic programming), los métodos aumentados de Lagrange (augmetnted Lagrangian Methods) y el método de puntos interiores.

Una forma cuadrática puede ser representada de la siguiente forma:

Tal que es una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática.

Clasificación de una forma cuadrática

Sea una forma cuadrática. Se dice que

**Clasificación de las formas cuadráticas**

Decimos que se clasifica de la siguiente forma para no nulo:

* es una forma cuadrática definida positiva si .
* es una forma cuadrática semi definida positiva si .
* es una forma cuadrática definida negativa si .
* es una forma cuadrática semi definida negativa si .
* es una forma cuadrática indefinida si tal que y .

**Ejemplo**: Determinar si la siguiente forma cuadrática es positiva definida

Buscamos una matriz A simétrica tal que

Ahora, aplicamos la descomposición LU:

Al observar a , podemos ver que la matriz no es positiva definida.

**Convexidad**

Este concepto es fundamental en la optimización. Muchos problemas prácticos poseen esta propiedad, la cual generalmente los hace más fácil de resolver tanto en la teoría como en la práctica.

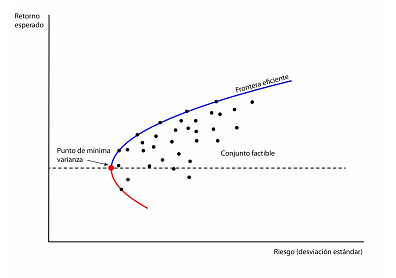
**Conjunto convexo**

Un conjunto se dice que es *convexo* si para cualquier , el punto pertenece a *C,* es decir:

Que es equivalente a decir que el segmento de recta entre también pertenece a *C.*

**Función Convexa**

Una Función Real es convexa si el dominio del plano situado por encima de su curva lo es. Es convexa si:



**Teoría de Portafolios**

El principal concepto en la optimización de portafolios propuesta por Harry Markowitz en 1990 se basa en que la correlación entre los activos financieros de inversión pueden reducir el riesgo (que en este caso se mide por la varianza) del portafolio y aun así obtener un rendimiento esperado previamente determinado.

Por ejemplo, si se tienen dos activos financieros: X y Y con las siguientes medias y varianzas en sus rendimientos:

Entonces, la varianza del portafolio formado por las combinaciones convexas tiene una forma cuadrática:

Para diferentes valores de la correlación entre X y Y, esta función cuadrática se parece apreciar en el siguiente diagrama:

Podemos observar que conforme la correlación entre los activos financieros es menor, los portafolios resultantes de las diferentes combinaciones pertenecen a un conjunto convexo.

El cálculo del portafolio óptimo trata sobre un problema convexo de optimización, el cual puede ser abordado desde dos puntos de vista:

* Maximizar el rendimiento sujeto a un riesgo establecido.
* Minimizar el riesgo sujeto a un rendimiento establecido.

En el primer caso se busca:

En el segundo caso se busca:

Donde:

* : es la matriz de varianzas y covarianzas de los activos.
* : es el vector de ponderaciones.
* : es el rendimiento esperado del portafolio

Con base en lo propuesto por Markowitz en 1952, en este trabajo se buscará el portafolio eficiente () mediante el siguiente problema de optimización:

En donde es un rendimiento previamente establecido por el inversionista y la varianza del portafolio, al ser una forma cuadrática, se puede representar de la siguiente manera

Tal que la matriz de varianzas y covarianzas () es una matriz simétrica positiva definida pues su determinante es siempre no negativo .[[1]](#footnote-1)

**Posición Corta**

En finanzas, la posición corta implica pedir prestado un activo financiero con el fin de venderlo. Con el dinero obtenido se invierte en otros activos financieros con los cuales se espera obtener un rendimiento que permita pagar el activo financiero prestado y un rendimiento excedente. En términos de los portafolios de inversión esto implica que pueden existir valores .

**Posición Larga**

la posición larga implica invertir cierta cantidad de dinero en un activo financiero. En términos de los portafolios de inversión esto implica que pueden existir valores .

**Portafolio optimo donde no se permiten las posiciones cortas**

La función objetivo en los problemas de optimización de portafolios donde no se permiten las posiciones cortas es cuadrática. Por lo tanto, se propone un modelo de optimización cuadrática con le fin de obtener los pesos que minimicen el riesgo sujeto a un determinado nivel de rendimiento.

En el caso de que se permitan las posiciones cortas, la obtención de los pesos del portafolio optimo puede hacerse de manera analítica[[2]](#footnote-2). Sin embargo, para el problema donde no se permiten las posiciones cortas, la optimización se debe realizar de forma numérica. Así, se define la selección del portafolio mediante el siguiente problema de optimización cuadrática:

Como es una matriz positiva definida, el problema de optimización planteado por Markowitz se convierte en un problema de optimización convexa en el que existe una solución que es un óptimo global.

**Optimización en R Project**

Con el fin de resolver el problema de optimización cuadrática planteado previamente, se muestra la función solve.QP()[[3]](#footnote-3) del paquete quadprog de R Project.

> #Cargar las librerías necesarias

> library(quadprog)

> args(solve.QP)

function (Dmat, dvec, Amat, bvec, meq = 0, factorized = FALSE)

NULL

> library(fBasics)

> #Obtener los rendimeintos

> Rendimientos\_Activos=100 \* LPP2005REC[, 1:6]

> #Proponemos como rendimiento objetivo la media de todos los activos del portafolio:

> Rend\_Obj=mean(colMeans(Rendimientos\_Activos))

> #Optimizamos:

> Portafolio=Portfolio\_Optimo(Rendimientos\_Activos, Rend\_Obj)

> #Obtenemos los pesos del portafolio

> Pesos = Portafolio$Pesos

> #Revisamos que la suma de los pesos da 100%

> sum(Pesos)

[1] 100

> #Revisamos que el rendimiento ponderado coincide con el rendimiento objetivo

> Rendimiento\_Ponderado = Pesos %\*% colMeans(Rendimientos\_Activos)

Función: Portfolio\_Optimo

|  |
| --- |
| > #Los inputs son el rendimiento de los activos y el rendimiento establecido por  el inversionista  > Portfolio\_Optimo <- function(Rendimientos\_Activos, Rend\_Obj)  + { #Obtenemos el número de activos  + n= ncol(Rendimientos\_Activos)  + #Determinamos la matriz de covarianzas de los rendimientos  + Dmat = cov(Rendimientos\_Activos)  + #Hacemos que el vector d sea de puros ceros para que -d^Tb=0  + dvec = rep(0, times=n)  + #Definimos la matriz de restricciones  + Amat = t(rbind(Rendimiento=colMeans(Rendimientos\_Activos),Presupuesto=rep(1, n),  LongOnly=diag(n)))  + #definimos lo que debe cumplirse: Que el rendimiento sea igual al rendimiento  objetivo y que los pesos sumen 1  + bvec = c(Rendimiento=Rend\_Obj, Presupuesto=1, LongOnly=rep(0, times=n))  + #Le decimos a la función que sólo las dos primeras restricciónes son de igualdad  + meq = 2  + # 2 Optimize Weights:  + Portfolio = solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq)  + Pesos = Portfolio$solution  + names(Pesos) = colnames(Rendimientos\_Activos)  + # Return Value:  + list(  + Pesos = 100\*Pesos,  + Riesgo = Portfolio$value,  + Rendimiento = Rend\_Obj)  + } |
|  |
| |  | | --- | | > | |

**Portafolio optimo donde no se permiten las posiciones cortas con activo libre de riesgo**

Además de considerar las posiciones largas, si se permite invertir en un activo libre de riesgo (), el rendimiento de las distintas ponderaciones en el portafolio por Markowitz se puede representar por medio de la Línea del Mercado de Capitales (CML). El punto en el que dicha línea toca a la frontera eficiente concuerda con el portafolio de riesgo óptimo. Dicho portafolio también se denomina portafolio de tangencia. Matemáticamente se puede expresar como el portafolio que maximiza la siguiente cantidad:

A también se le conoce como el Índice de Sharp. A continuación, se muestra el código en R Project que calcula el portafolio de tangencia, es decir, el riesgo asociado a dicho portafolio, el rendimiento, los pesos y el Índice de Sharp.

El portafolio de tangencia se obtiene al maximizar el índice de Sharp como función del rendimiento objetivo.

Se siguen los siguientes pasos:

1. Se hace una función para calcular el Índice de Sharp.
2. Se optimizan los pesos del portafolio de tangencia.

La función utilizada en R Project: optim() se basa en el gradiente conjugado y el método de Newton.

**Portafolio de mínima varianza y la frontera eficiente**

En este caso modificamos la función portfolio() para obtener los pesos para obtener la frontera eficiente incluyendo los pesos del portafolio de mínima varianza. Esto lleva a crear la función: portfolioFrontier() que nos entrega los pesos de los portafolios de la frontera eficiente. Así mismo, el número de portafolios en la frontera eficiente lo obtenemos mediante la función: nPoints.

**Anexos**

**Anexo 1:** Portafolio con un Activo Libre de Riesgo con Posiciones Cortas Permitidas

En la teoría moderna de inversiones se busca crear portafolios que aprovechen el efecto de la diversificación mediante la inversión en diferentes tipos de activos con el fin de maximizar el rendimiento del portafolio sujeto al riesgo dispuesto a asumir.

A continuación se muestra el ejemplo del cálculo de un portafolio de inversión con las siguientes características:

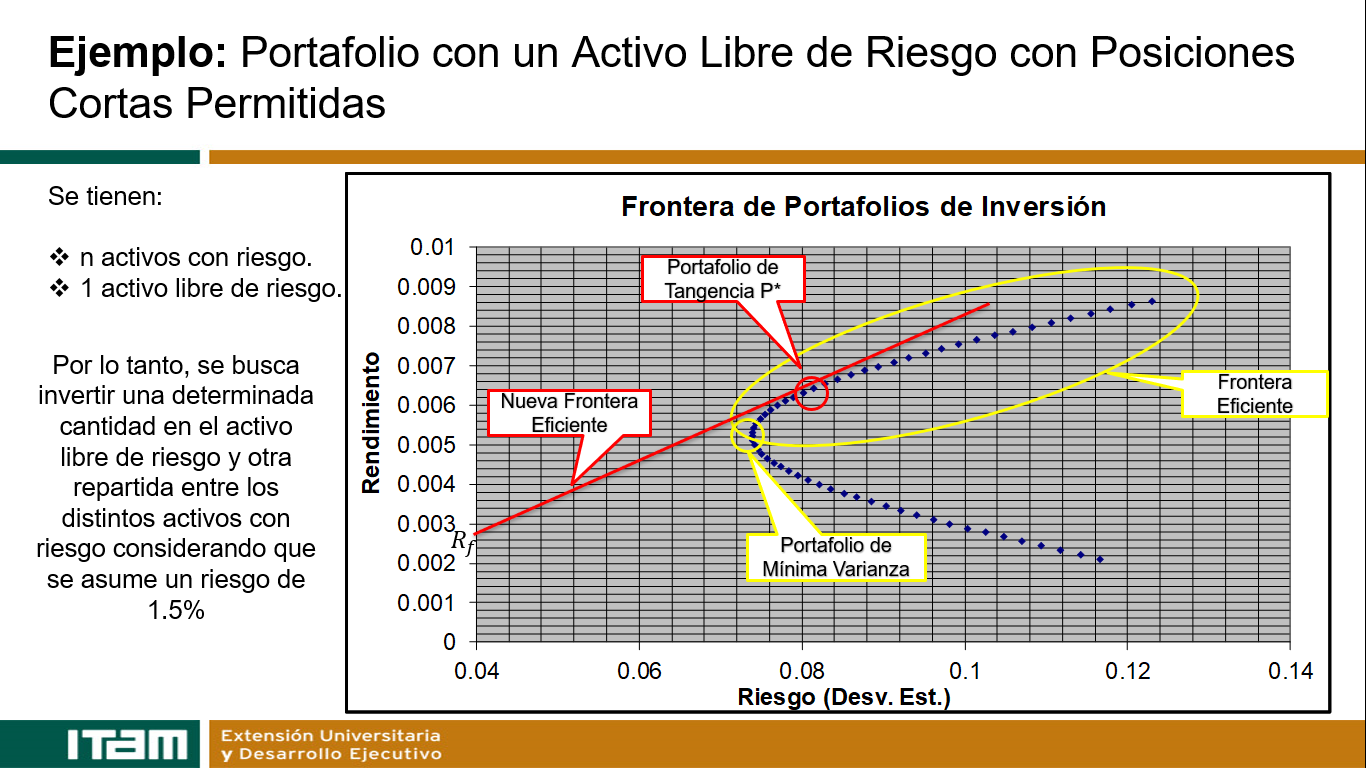
* Se permiten las posiciones cortas.
* Se invierte en un activo libre de riesgo.
* Se asume un riesgo de 1.5% en la desviación estándar del portafolio.

**Objetivo**

Se busca construir la frontera eficiente y un portafolio de inversión () bajo el supuesto de que se esta dispuesto a asumir un riesgo de 1.5% en la desviación estándar del portafolio.

Se tienen:

* n activos con riesgo.
* 1 activo libre de riesgo.



Se genera la nueva frontera eficiente mediante la siguiente expresión:

Donde es la pendiente de dicha recta.

Así, se busca la recta con mayor pendiente que toque la curva. Es decir:

Vemos que:

Se puede demostrar analíticamente que

Tal que los pesos del portafolio de tangencia son:

Estos pesos ponderados se obtienen de la solución analítica del siguiente problema de maximización:

Vemos que:

Derivando

Para

Así

Así

Para

Tal que

Con

Esto nos permite calcular su media y desviación estándar:

De esta manera se puede construir la nueva frontera eficiente:

Si tenemos que n=3 y tal que:

Se está dispuesto a asumir un riesgo de

Sistema de ecuaciones:

Es decir

Solución:

Lo que implica que el portafolio de tangencia es:

Su media y desviación estándar:

Se genera la nueva frontera eficiente mediante la siguiente expresión:

Al asumir que , se tiene

Por último, el portafolio de inversión () deseado se obtiene mediante la siguiente expresión (donde es el activo libre de riesgo):

**Anexo 2:** Solve.QP

La función solve.qp implementa el método dual de Goldfarb e Idnani (1982, 1983) para resolver problemas de programación cuadrática de la forma

La lista de argumentos del solucionador tiene 7 elementos:

* Dmat: Matriz que aparece en la función cuadrática para ser minimizada.
* dvec: Vector que aparece en la función cuadrática para ser minimizado.
* Amat: Matriz que define las restricciones bajo las cuales queremos minimizar la función cuadrática.
* bvec: vector que contiene los valores de (por defecto a cero).
* meq: donde las primeras meq restricciones se tratan como restricciones de igualdad, y las demás como restricciones de desigualdad (por defecto son 0).

La solución regresa una lista con los siguientes componentes:

* Solution: Vector que contiene la solución de la programación cuadrática del problema.
* Value: un escalar que representa el valor de la función cuadrática evaluada con la solución encontrada.
* Iterations: es un vector de longitud 2, en donde la primer componente contiene el número de iteraciones que necesitó el algoritmo para encontrar la solución y el segundo componente indica con qué frecuencia las restricciones se vuelven inactivas después de ser activadas primero.
* Iact: vector que contiene los índices de las restricciones activas en la solución.

Nota: La matriz Amat es de la siguiente forma:

Tal que

Es decir:

Donde las restricciones 1 y 2 son de igualdad y las siguientes son de desigualdad (meq=2)

**Anexo 3:** Algunas proposiciones teóricas sobre portafolios de inversión

**Proposición 1:** El conjunto de todos los portafolios de activos de riesgo factibles es convexo.

Prueba: un portafolio x es viable si y solo si las proporciones del portafolio suman 1;i.e., , donde N es el número de activos de riesgo. Supongamos que x e y son portafolios factibles y supongamos que es un número entre 0 y 1. Entonces está claro que tambien es factible.

**Proposición 2**: Sea c una constante y denote por R el vector de rendimientos promedio. Un portafolio x está en el sobre en relación con el conjunto de muestra de N activos si y solo si es la solución normalizada del sistema:

Prueba: una cartera x está dentro del conjunto de carteras factibles, si y solo si se encuentra en la tangencia de una línea que conecta algún punto c en el eje y con el conjunto factible. Dicho portafolio debe maximizar o minimizar la relación , donde es el producto vectorial que proporciona el rendimiento esperado del portafolio sobre c, y es la varianza del portafolio. Se deja que el valor de esta relación, cuando se maximice (o minimice), sea . Entonces nuestro portafolio debe satisfacer:

Sea h un activo particular y diferencie esta última expresión con respecto a . Esto da: . Writing , vemos que un portafolio es eficiente si y solo si resuelve el sistema . Se normaliza z para que sus coordenadas sumen 1 y del resultado deseado.

**Proposición 3**: La combinación convexa de cualquiera de los dos portafolios está dentro del conjunto factible.

Prueba: Sean x y y los portafolios. Por el teorema anterior, se deduce que existen dos vectores, y , y dos constantes y , de manera que:

* x es el vector normalizado-a-unidad de ; i.e., , y y es el vector normalizado-a-unidad del vector .
* y

Además, dado que z maximiza la relación, se sigue que cualquier normalización de z también maximiza estas relaciones. Por lo tanto, sin pérdida en general, podemos suponer que z suma 1. Se sigue que para cualquier número real a, el portafolio resuelve el sistema . Esto prueba la afirmación.

**Proposición 4**: Si además de los activos de riesgo N, existe un activo libre de riesgo con retorno r, entonces se mantiene la línea estándar del mercado de valores.

donde

Prueba: si existe un activo libre de riesgo, entonces la línea tangente de este activo, a la frontera eficiente, domina todos los demás portafolios posibles. El punto de tangencia en la frontera eficiente se llama M.

**Bibliografía**

D. Goldfarb and A. Idnani, Dual and Primal-Dual Methods for Solving Strictly Convex Quadratic Programs. In J. P. Hennart (ed.), Numerical Analysis, Springer-Verlag, Berlin, pages 226—239, 1982.

D. Goldfarb and A. Idnani, A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. Mathematical Programming, 27, 1—33, 1983.

Snedecor, G. W. and Cochran, W. G. Statistical Methods, 7th edición, Ames, IA: Iowa State Press, p. 342, 1980.

Schulz Rodríguez, Guillermo Enrique.  Estimación de la superficie eficiente y el valor en riesgo de un potafolio de acciones. Ciudad de México, 2018.

Watsham, Terry J..  Quantitative methods in finance / Terry J. Watsham and Keith Parramore. --  London: International Thomson Business Press, 1997.

Piña Niño, Ángel.  Optimización de medidas de riesgo: VaR y C-VaR / Ángel Piña Niño. México, D. F., 2012.

Bodie, Zvi.  Investments / Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus. --  New York, N. Y.: McGraw-Hill Education, © 2018.

Hull, John.  Options, futures, and other derivatives / John C. Hull. --  New York, N. Y.: Pearson Education, © 2018.

Stavros A. Zenios. Financial optimization / ed. -- Cambridge, England : Cambridge University Press, 1999, 1993

1. Snedecor, G. W. and Cochran, W. G. Statistical Methods, 7th edición, Ames, IA: Iowa State Press, p. 342, 1980. [↑](#footnote-ref-1)
2. Se muestra un ejemplo y su desarrollo analítico en el Anexo 1. [↑](#footnote-ref-2)
3. Dicha función se basa en una subrutina Fortran. Dicha subrutina implementa el método dual de Goldfarb e Idnani, con el fin de resolver problemas de optimización de la forma min sujeto a (1983). [↑](#footnote-ref-3)